ZORRO

Profesor
Edson Curahua




# GEOMETRÍA

## GRUPO PITÁGORAS

# CLASE 09: PUNTOS NOTABLES

## PRINCIPALES PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

**BARICENTRO, ORTOCENTRO, INCENTRO, EXCENTRO Y CIRCUNCENTRO**

**TRIÁNGULO MEDIANO**

**TRIÁNGULO ÓRTICO**

**RECTA DE EULER**

**TEOREMA DE EULER**

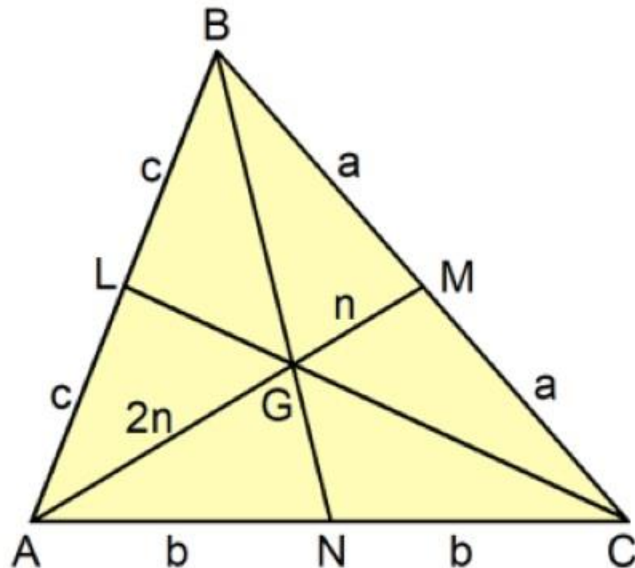
**PROPIEDADES**

# PUNTOS NOTABLES

## 01. BARICENTRO (G)

Todo triángulo tiene tres medianas las cuales concurren en un punto denominado Baricentro.

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuyas medidas están en la razón de 1 a 2. Su posición es interior para todo triángulo.




**G: BARICENTRO**

PROPIEDAD

$AG=2(GM)$

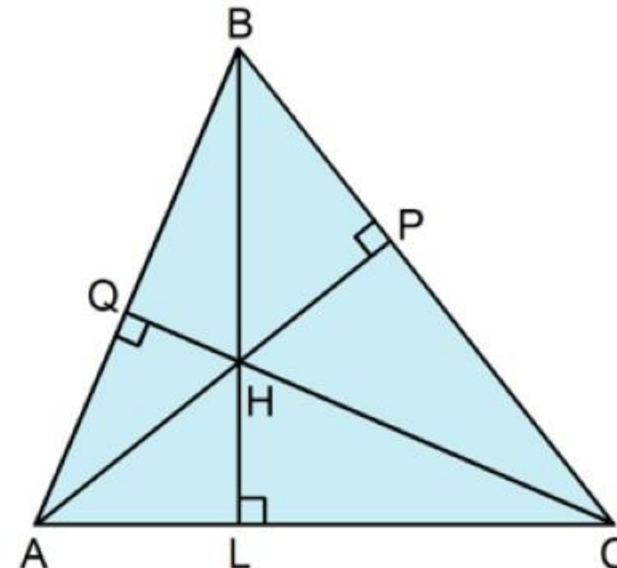
$BG=2(GN)$

$CG=2(GL)$

## 02. ORTOCENTRO (H)

Todo triángulo tiene tres alturas las cuales concurren en un punto denominado Ortocentro.

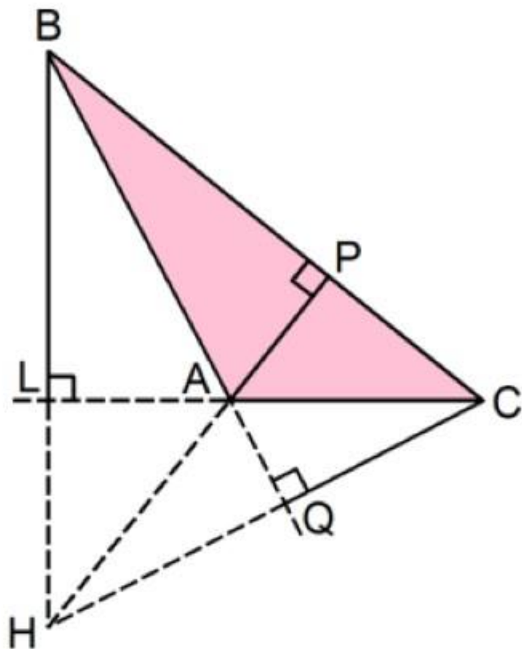
El Ortocentro está ubicado en el interior en un triángulo acutángulo, en el exterior en un triángulo obtusángulo y en el vértice del ángulo recto en un triángulo rectángulo.




**ΔABC: Acutángulo**

**H: ORTOCENTRO**

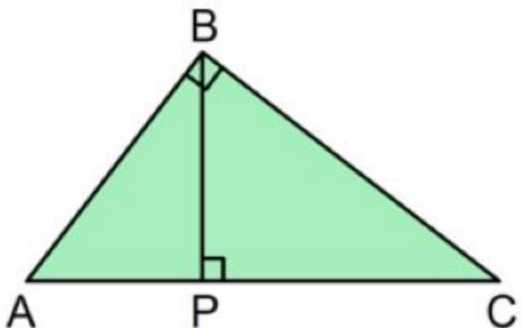
H es interior




**ΔABC: Obtusángulo**

**H: ORTOCENTRO**

H es exterior

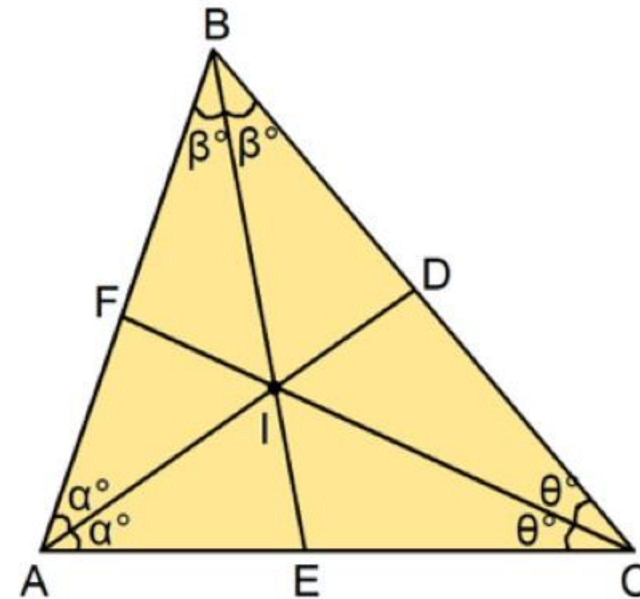



**ΔABC: Rectángulo**

**B: ORTOCENTRO**

## 03. INCENTRO (I)

Todo triángulo tiene tres bisectrices interiores las cuales concurren en un punto denominado Incentro.



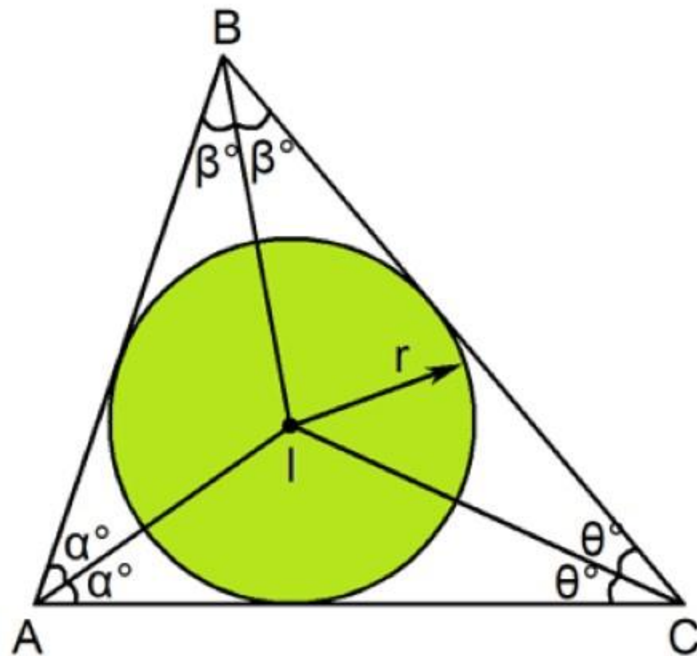

**I: INCENTRO**

Sus propiedades son:

a) Es el centro de la circunferencia inscrita.

b) Equidista de los lados.

c) Su posición para todo triángulo es interior.

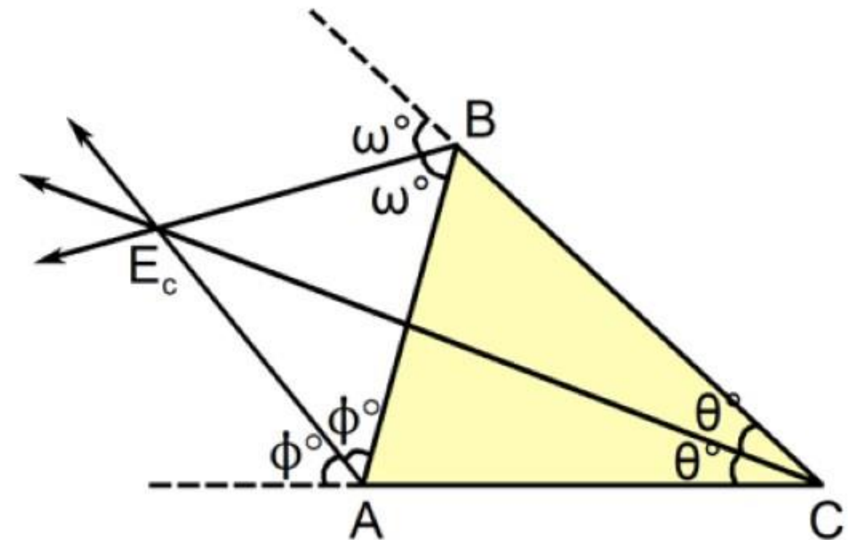



**I: INCENTRO**

r: Inradio del ΔABC

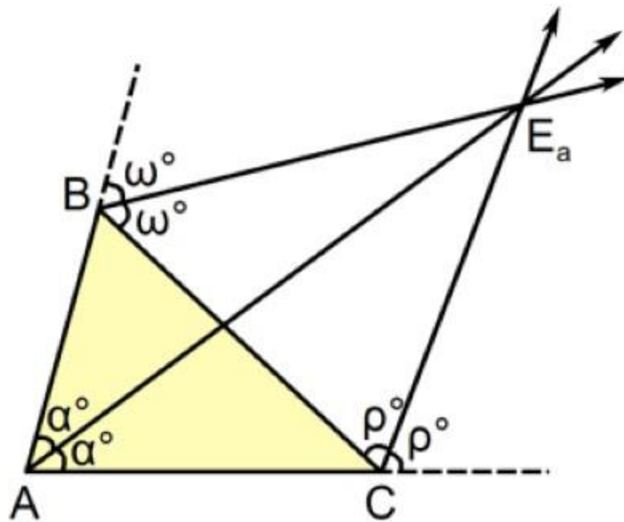
## 04. EXCENTRO (E)

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno y las bisectrices de los ángulos externos correspondientes a los otros vértices, se intersecan en un punto denominado Excentro.

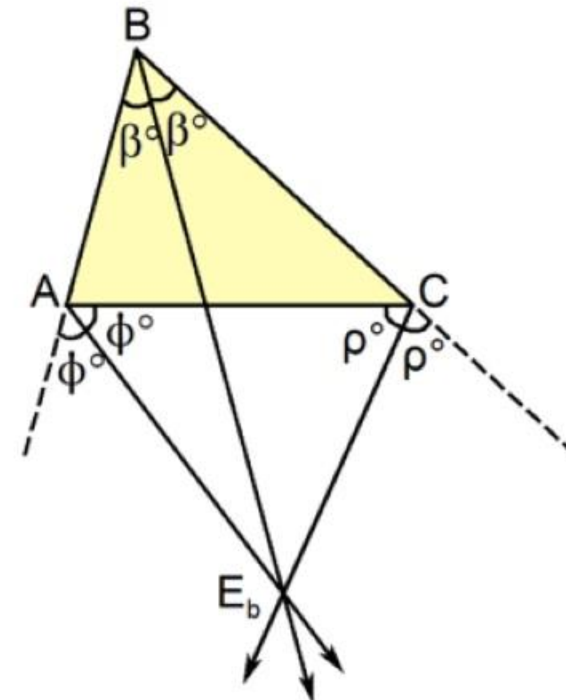



**$E_c$: EXCENTRO RELATIVO A $\overline{AB}$**

# PUNTOS NOTABLES

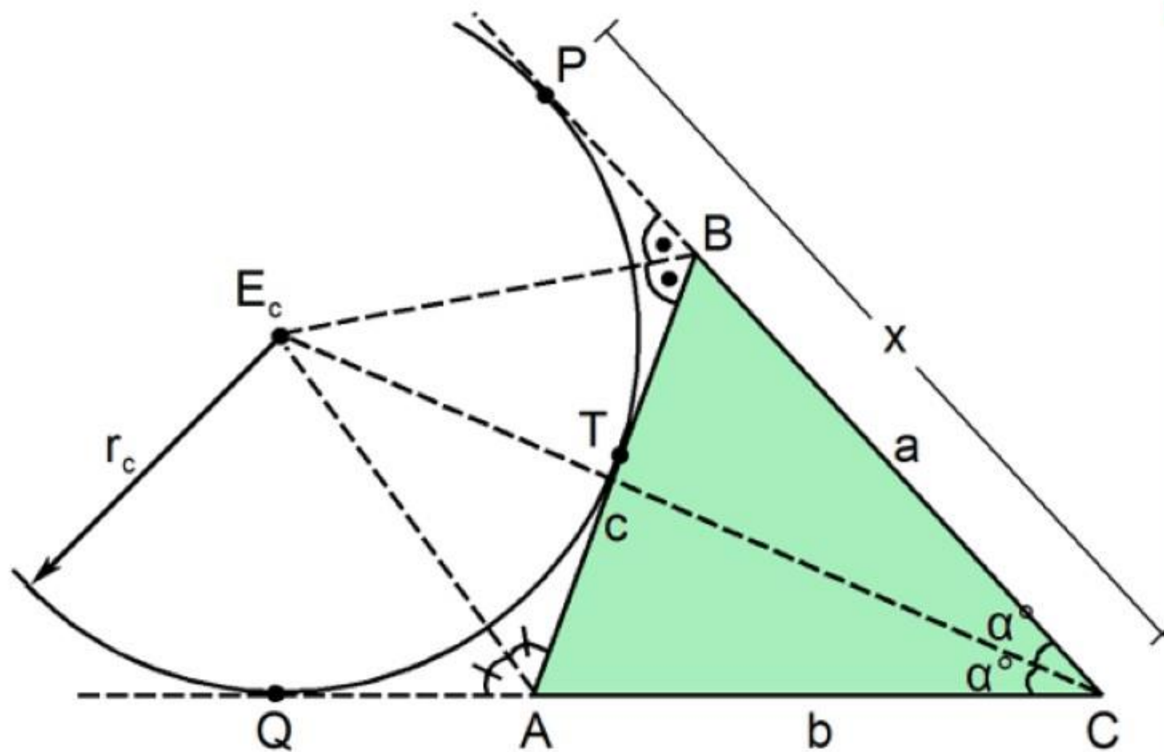



$E_a$: EXCENTRO RELATIVO A $\overline{BC}$




$E_b$: EXCENTRO RELATIVO A $\overline{AC}$

# PUNTOS NOTABLES




**$E_c$: EXCENTRO RELATIVO A $\overline{AB}$**

**$r_c$: EXRADIO RELATIVO A $\overline{AB}$**

$$x = \frac{a + b + c}{2}$$

## Propiedades

a) Es el centro de la circunferencia ex-inscrita al triángulo.

b) Equidista de las rectas que contienen a los lados del triángulo.

c) Su posición para todo triángulo es exterior, existiendo por cada triángulo tres excentros.

# PUNTOS NOTABLES

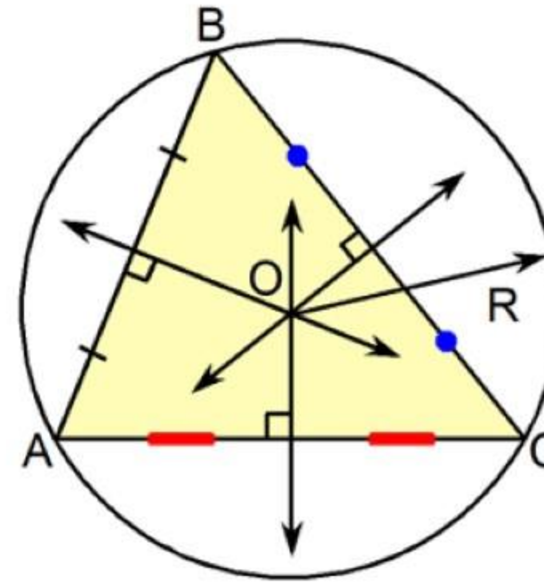
## 05. CIRCUNCENTRO (O)

En todo triángulo las mediatrices referentes a cada uno de sus lados concurren en un punto denominado Circuncentro. Sus propiedades son:

a) Es el centro de la circunferencia circunscrita.

b) Equidista de los vértices del triángulo.

c) El circuncentro esta ubicado: en el interior, en un triángulo acutángulo; en el exterior, en un triángulo obtusángulo, y en el punto medio de la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

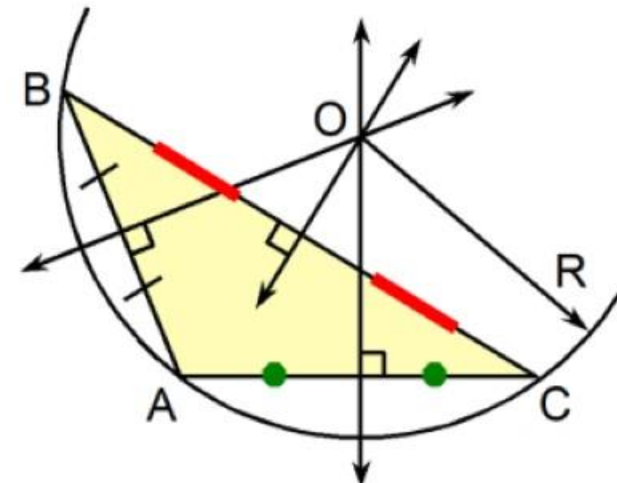



**∆ABC: Acutángulo**

**O: CIRCUNCENTRO**

O es interior

R: Circunradio




**∆ABC: Obtusángulo**

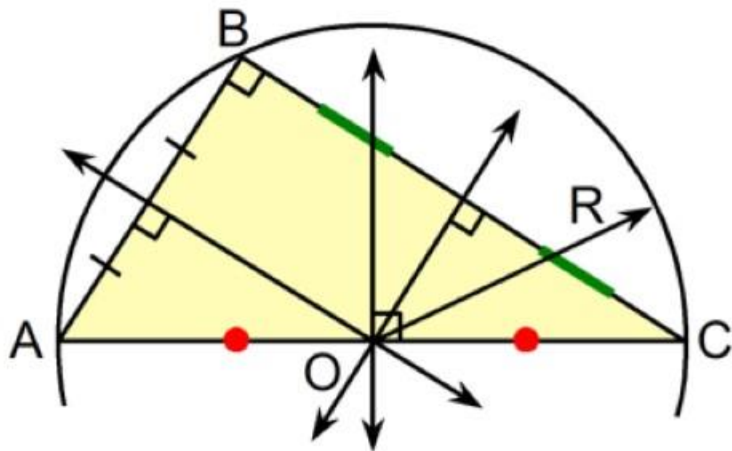
**O: CIRCUNCENTRO**

O es exterior

R: Circunradio

# PUNTOS NOTABLES

**ΔABC: Rectángulo**




**O: CIRCUNCENTRO**

R: Circunradio

# PUNTOS NOTABLES

**EJEMPLO**

Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) con respecto de las siguientes proposiciones.

I. El baricentro de un triángulo siempre pertenece a la región interior de dicho triángulo.

II. Solo existen 3 puntos en el plano, que equidistan de los lados de un triángulo.

III. El circuncentro de un triángulo puede ser un vértice.

IV. En un triángulo, dos de sus excentros y un vértice son colineales.

A) VVVV B) VFVF C) FVFV

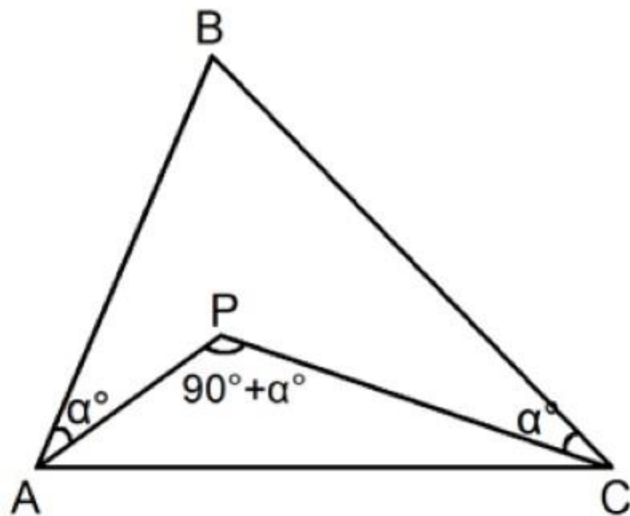
D) VFFV E) FVVF

**Resolución:**

Rpta. D

## EJEMPLO

¿Qué punto notable es P, para el triángulo ABC?

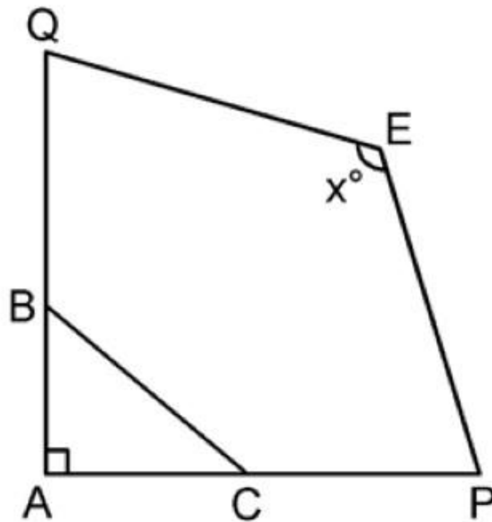



A) Ortocentro B) Excentro C) Baricentro
D) Incentro E) Circuncentro

Rpta. A

**EJEMPLO**

Si E es el excentro del triángulo ABC y BC=BQ=CP, calcular el valor de x.



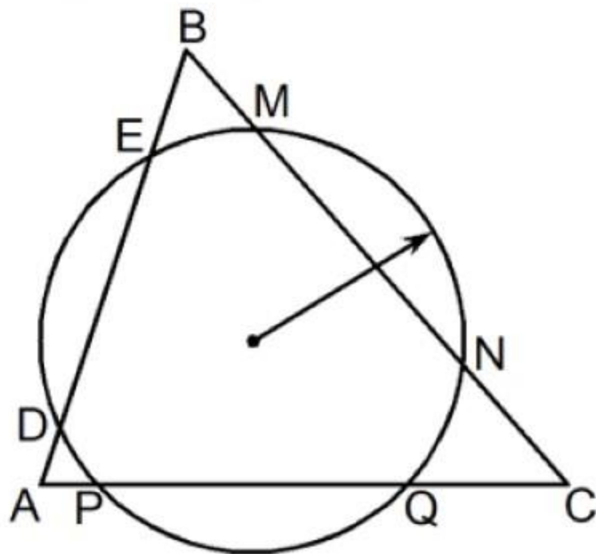

A) 120 B) 135 C) 105
D) 150 E) 115

Rpta. B

# PUNTOS NOTABLES

**EJEMPLO**

¿Qué punto notable es el centro de la circunferencia mostrada para el triángulo ABC?
(AD=AP, BE=BM y QC=NC)




A) Ortocentro B) Excentro C) Baricentro
D) Incentro E) Circuncentro

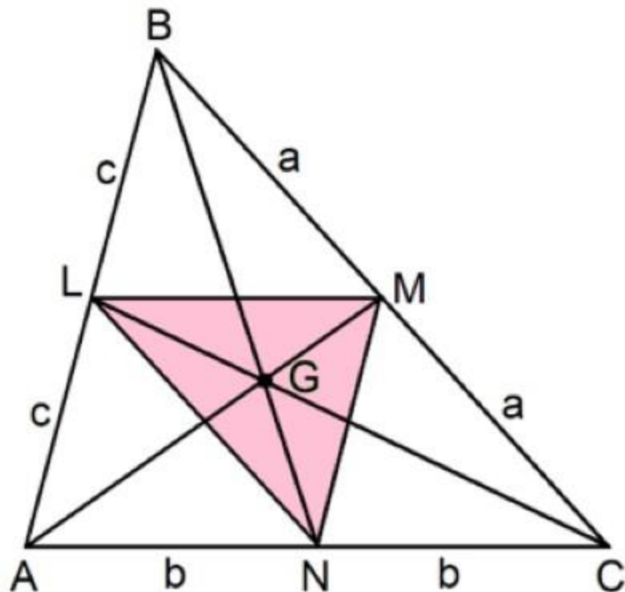
Rpta. D

# PUNTOS NOTABLES

## TRIÁNGULO MEDIANO O COMPLEMENTARIO

El triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo ABC se denomina triángulo mediano o complementario del triángulo ABC.

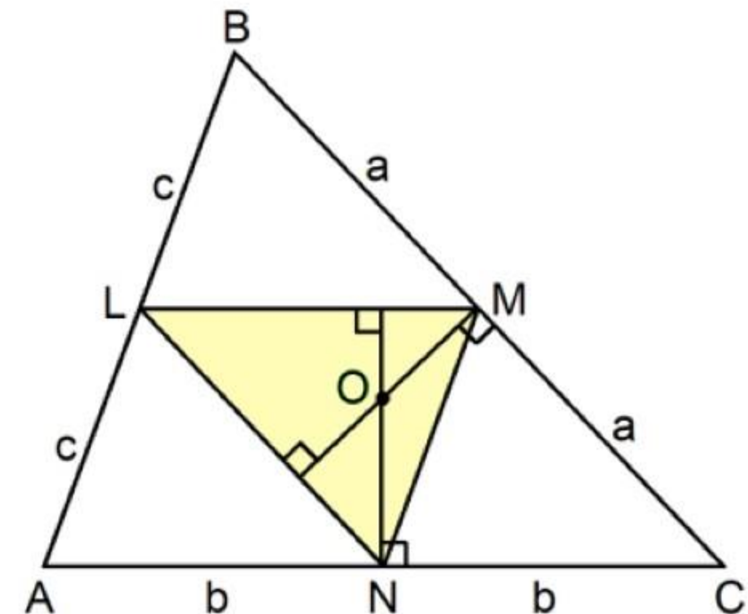
El baricentro de un triángulo dado es a la vez baricentro de su triángulo mediano.




$\Delta$MNL: $\Delta$Mediano del $\Delta$ABC

G: Baricentro del $\Delta$MNL

El circuncentro de un triángulo es a la vez ortocentro de su triángulo mediano.




O: Circuncentro del $\Delta$ABC

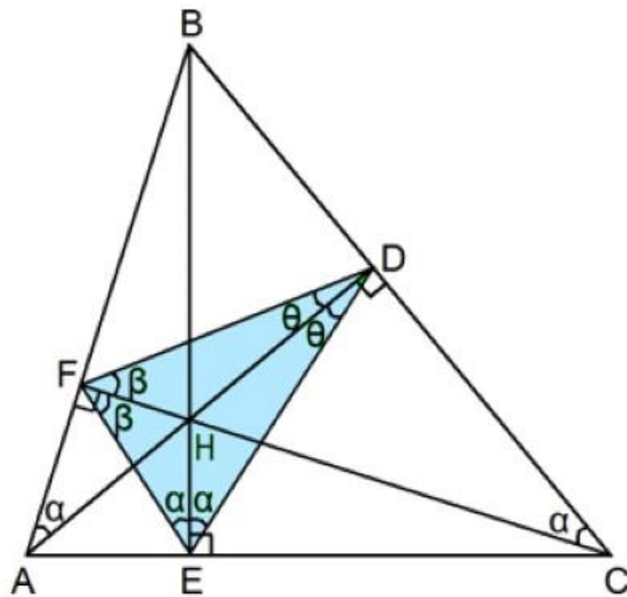
O: Ortocentro del $\Delta$MNL

# PUNTOS NOTABLES

## TRIÁNGULO ÓRTICO

El triángulo formado al unir os pies de las alturas de un triángulo ABC se denomina triángulo órtico del triángulo ABC. El triángulo rectángulo no tiene triángulo órtico.

El ortocentro de un triángulo acutángulo es a la vez incentro de su triángulo órtico, además cada vértice del triángulo acutángulo es un excentro del triángulo órtico.




ΔDEF: ΔÓrtico del ΔABC

H: Incentro del ΔDEF

## NOTAS

a) A, B y C son excentros del triángulo DEF.

b) El triángulo ABC se denomina triángulo antiórtico del triángulo DEF.

c) En un triángulo obtusángulo el vértice del ángulo obtuso es el incentro del triángulo Órtico, además el ortocentro y los vértices de los ángulos agudos, son los excentros del triángulo Órtico.

# PUNTOS NOTABLES

**EJEMPLO**

En un triangulo obtusángulo de circuncentro O, ¿qué punto notable representa O para su triángulo mediano?

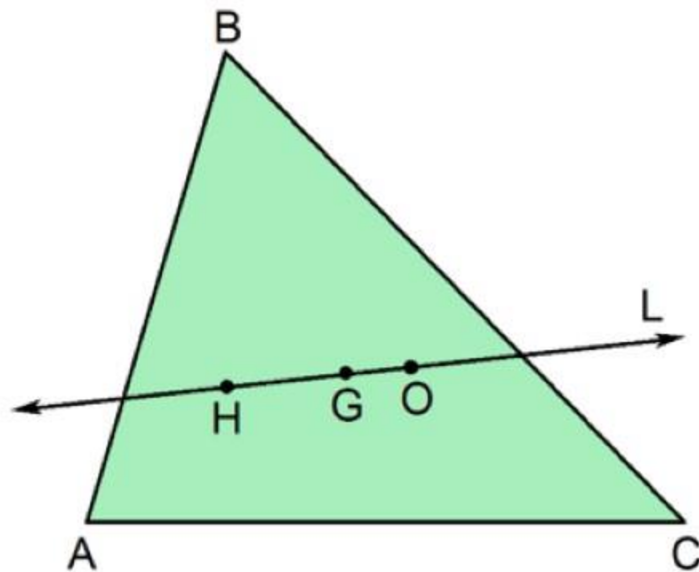
A) Ortocentro B) Excentro C) Incentro
D) Circuncentro E) Baricentro

Rpta. A

# PUNTOS NOTABLES

## RECTA DE EULER

En todo triángulo, a excepción del triángulo equilátero, se cumple que el ortocentro, baricentro y circuncentro están situados en una misma línea recta, denominada Recta de Euler, cumpliéndose además que la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.




$\overleftrightarrow{L}$: Recta de Euler

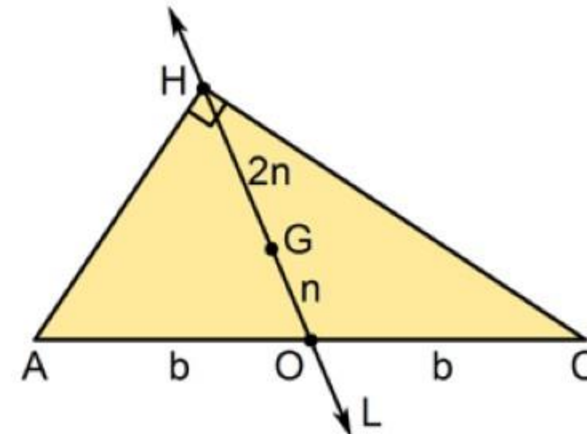
Si H: Ortocentro
G: Baricentro
O: Circuncentro

Entonces H, G y O son colineales

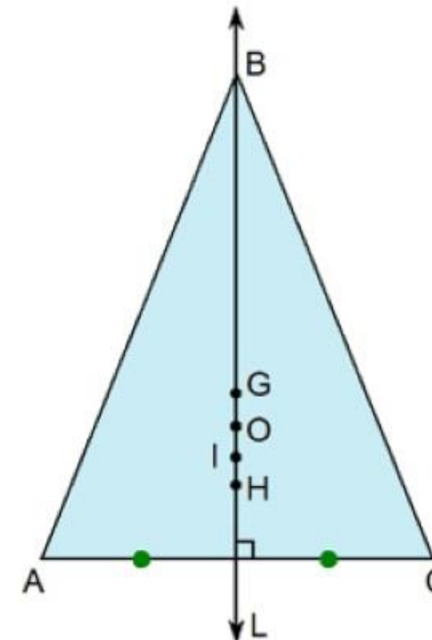
PROPIEDAD

HG=2(GO)

## RECORDAR




$\overleftrightarrow{L}$: Recta de Euler

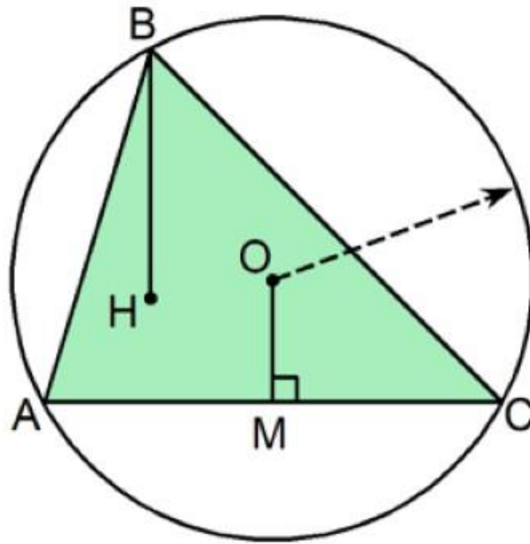



$\overleftrightarrow{L}$: Recta de Euler

# PUNTOS NOTABLES

## TEOREMA DE EULER

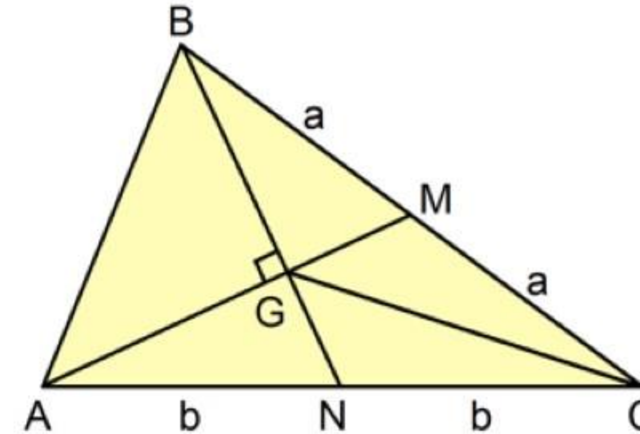
En todo triángulo la distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto.




En la figura H es Ortocentro y O es Circuncentro, entonces:

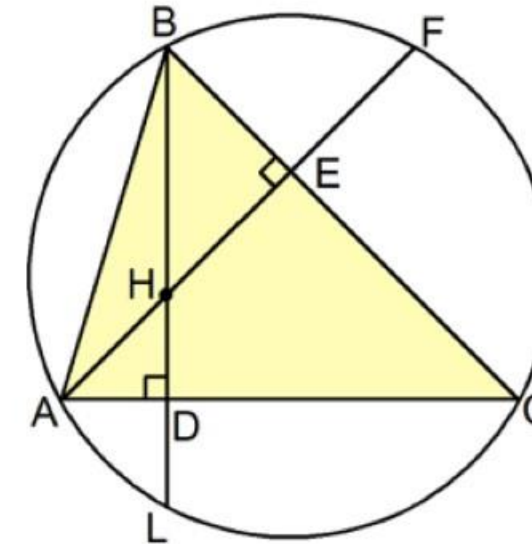
BH=2(OM)

## PROPIEDADES




G: Baricentro

GC=AB

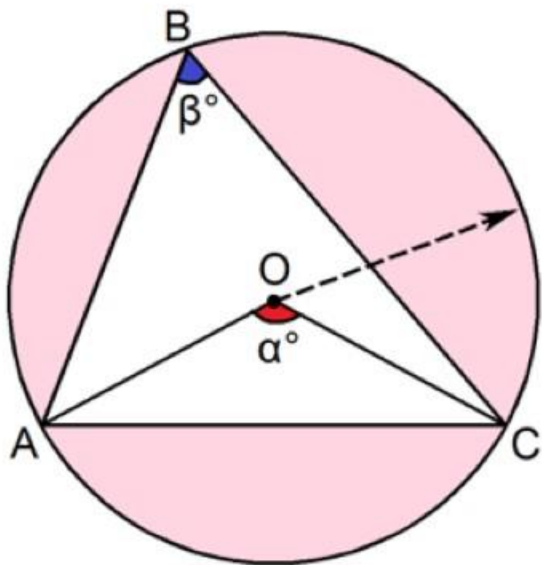



H: Ortocentro

HD=DL

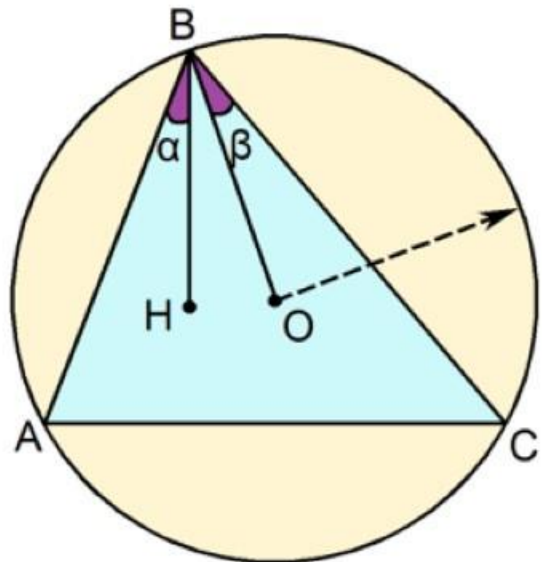
HE=EF

# PUNTOS NOTABLES




O: Circuncentro

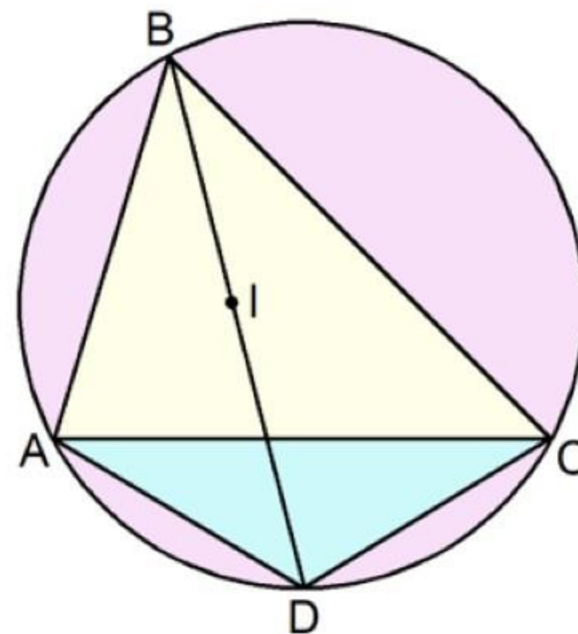
$\alpha=2\beta$




H: Ortocentro

O: Circuncentro

$\alpha=\beta$




I: Incentro

DA=DI=DC

# PUNTOS NOTABLES

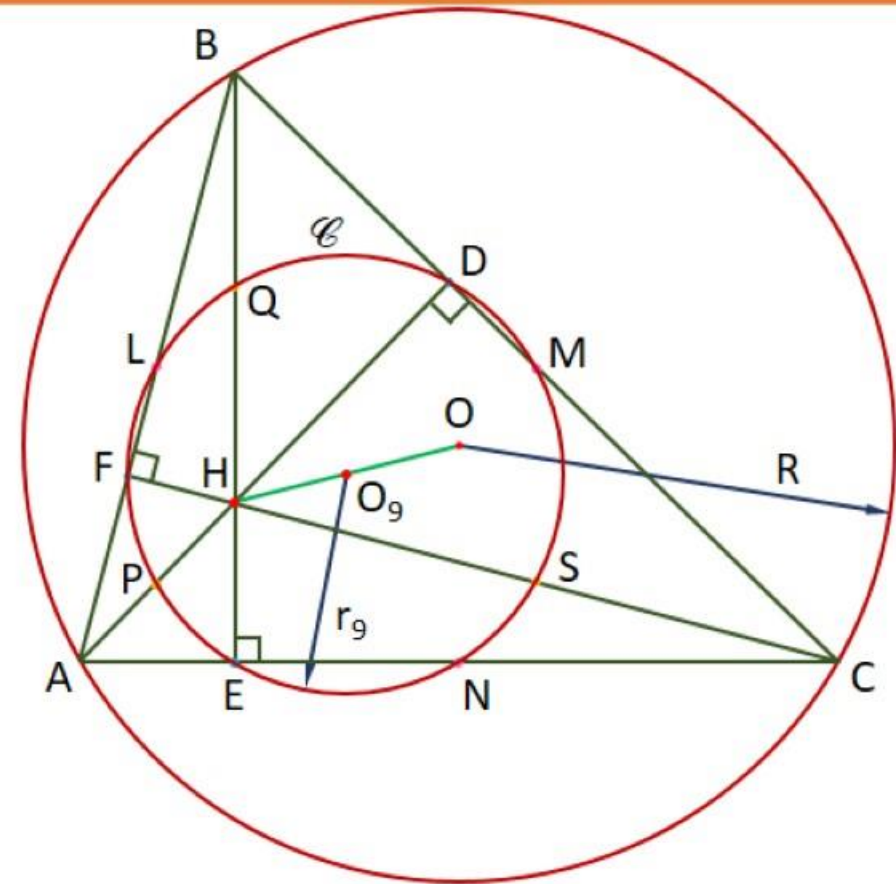
## CIRCUNFERENCIA DE EULER

**Definición.-** Se denomina circunferencia de Euler de un triángulo no equilátero a la circunferencia que contiene a los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son el ortocentro y cada vértice del triángulo.

$\mathscr{C}$ : Circunferencia de Euler

$$HO_9 = O_9O$$

$$r_9 = \frac{R}{2}$$




D, E y F: pies de las alturas

M, N y L: puntos medios de los lados

P, Q y S: puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices.

# PUNTOS NOTABLES

**EJEMPLO**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo equilátero, la circunferencia de Euler está inscrita en el triángulo.

II. En un triángulo isósceles, la circunferencia de Euler es tangente a la base del triángulo.

III. En un triángulo rectángulo, la circunferencia de Euler contiene al ortocentro del triángulo.

A) VVV B) VVF C) VFF

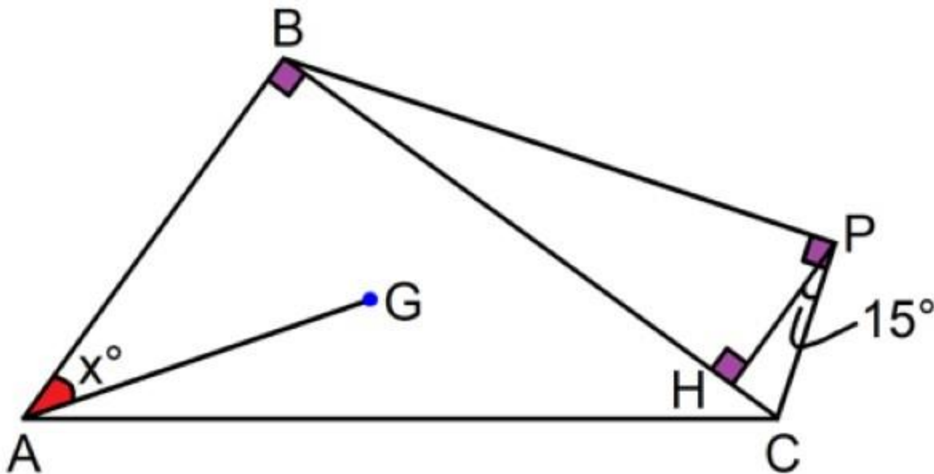
D) FFV E) FFF

Rpta. A

# PROBLEMAS DE CLASE

# PROBLEMAS

01. En la figura: G es baricentro del triángulo ABC, AG= 8 y PH= 3. Calcular el valor de x.



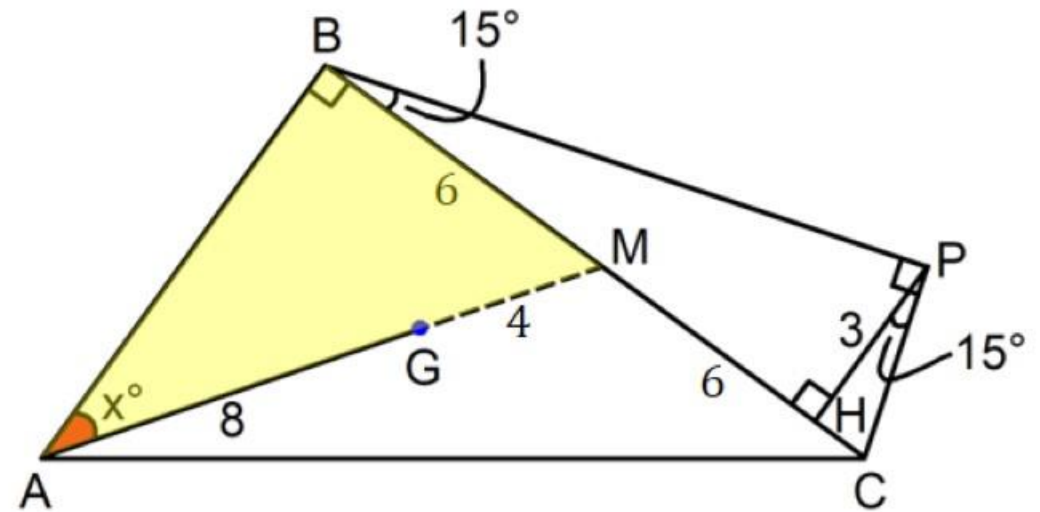

A) 30 B) 37 C) 45
D) 53 E) 60

**Resolución:**

Se pide: x=?

Prolongamos $\overline{AG}$ hasta cortar a $\overline{BC}$ en el punto M, luego:

$$BM = MC \text{ y } GM = 4$$




En el triángulo BPC (15-75), por propiedad se tiene:

$$BC = 12 \quad \rightarrow \quad BM = MC = 6$$

Finalmente el triángulo ABM es notable.

$$\therefore x = 30$$

Rpta: A

# PROBLEMAS

02. En un triángulo acutángulo ABC de incentro I, circuncentro O, calcule m∠CIO si m∠ABC=60.

A) 10 B) 40 C) 30

D) 60 E) 20

**Resolución:**

Se pide: m∠CIO=x

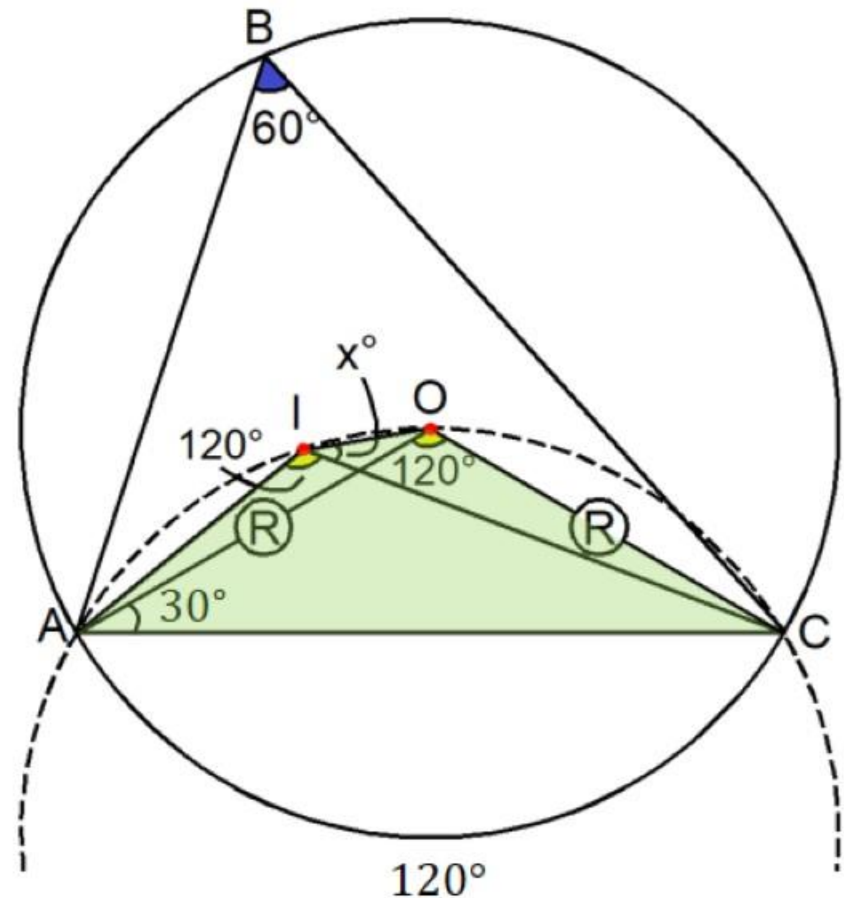
Por propiedad, I es incentro, se tiene:

$$\mathrm{m}\angle \mathrm{AIC} = 90 + \frac{60}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{m}\angle \mathrm{AIC} = 120$$

También, para el circuncentro O, se tiene:

$$\mathrm{m}\angle \mathrm{AOC} = 120$$

$$\mathrm{y}\ \ \mathrm{m}\angle \mathrm{OAC} = 30$$




Finalmente el cuadrilátero AIOC es inscriptible, por rebote, entonces:

$$\mathrm{x} = 30$$

Rpta: C

03. Dado el cuadrado ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto E y se construye una semicircunferencia de diámetro $\overline{DE}$. Si $\overline{BE}$ interseca a dicha semicircunferencia en el punto P, ¿qué punto notable es el centro del cuadrado ABCD, del triángulo ABP?

A) Incentro

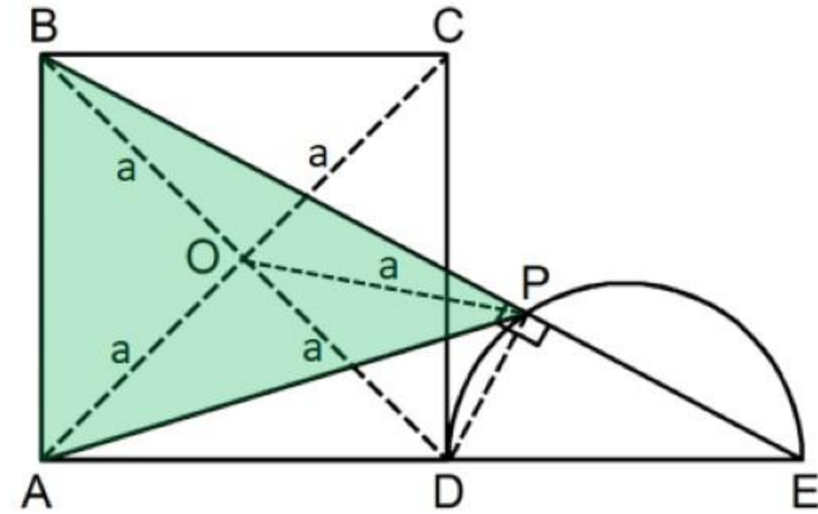
B) Excentro

C) Circuncentro

D) Ortocentro

E) Baricentro

**Resolución:**



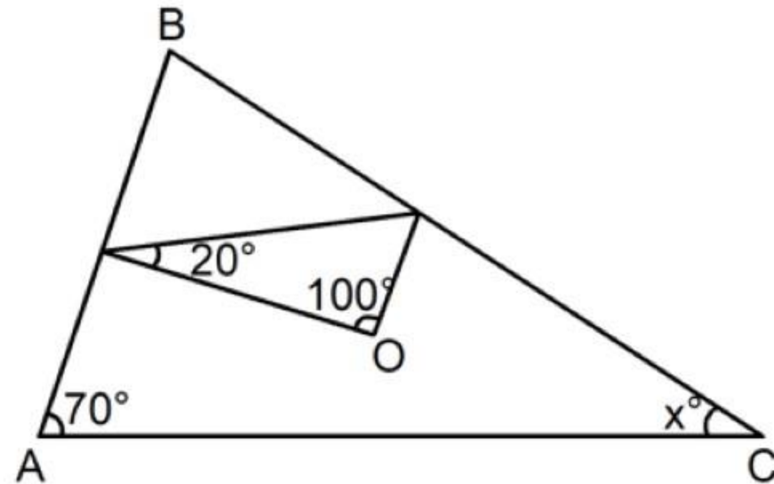

En el cuadrado ABCD: AO=OB=OC=OD=a

En el triángulo rectángulo BPD: PO=a

Finalmente O equidista de los vértices A, B y P, por lo tanto O es circuncentro.

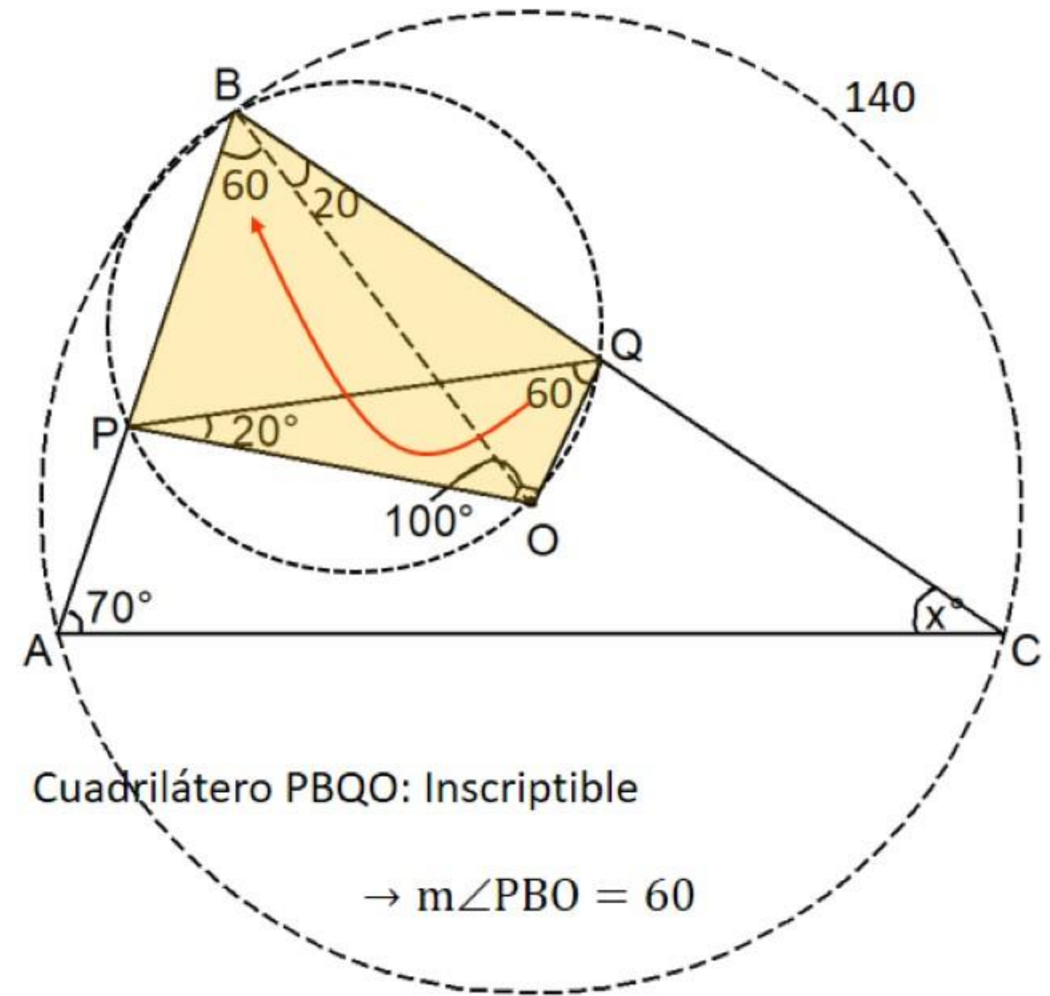
Rpta. C

04. En el gráfico O es circuncentro del triángulo ABC. Calcular el valor de x.




A) 20 B) 30 C) 40
D) 25 E) 50

**Resolución:**




Cuadrilátero PBQO: Inscriptible

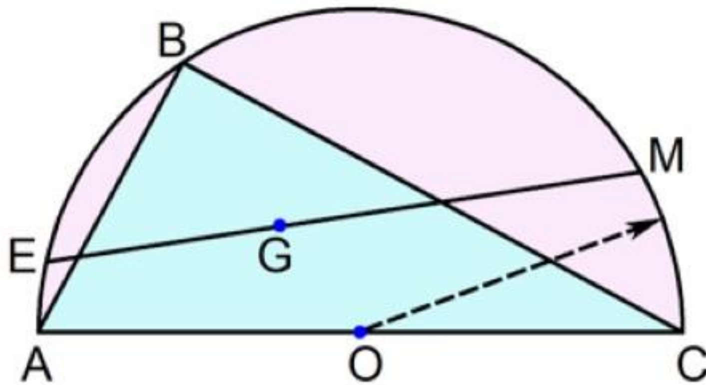
$$\rightarrow m\angle PBO = 60$$

Finalmente en el triángulo ABC:

$$\therefore x = 30$$ Rpta. B

# PROBLEMAS

05. Si G es el baricentro del triángulo ABC y $m\widehat{BM} = 90$, calcular $m\widehat{BE}$.

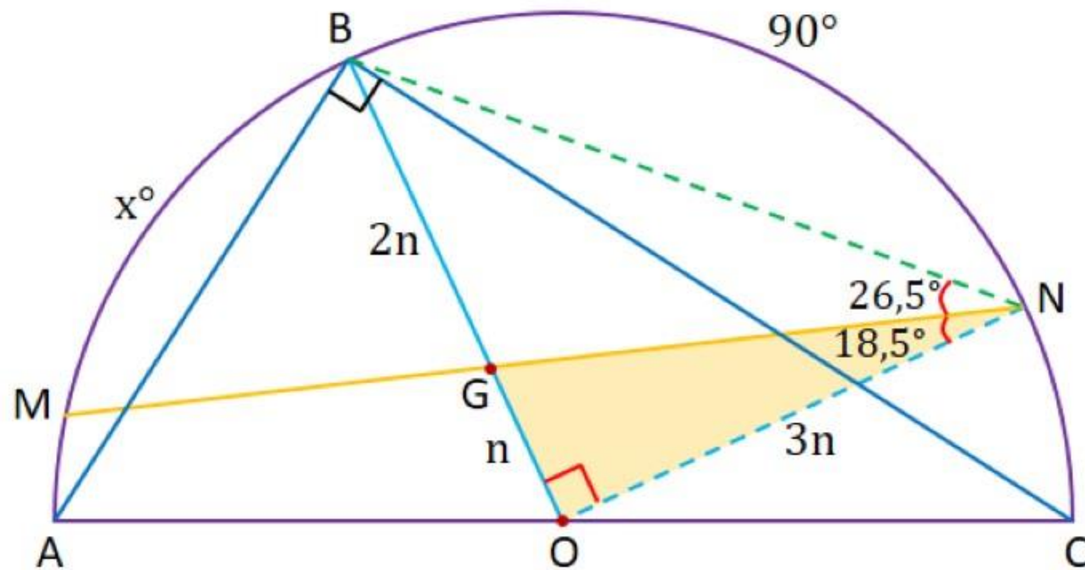



A) 18,5
B) 26,5
C) 37
D) 45
E) 53

**Resolución:**

# PROBLEMAS

## RESOLUCIÓN:




Se pide: $m\widehat{BE} = x$

Dato: G es baricentro del triángulo ABC

Por dato: $OG = n \rightarrow BG = 2n$

Trazamos $\overline{ON}$ y $\overline{BN}$, luego:

$$ON = 3n \text{ y } m\angle BON = 90$$

En el triángulo GON: $m\angle GNO = 18{,}5$

Además el triángulo BON es rectángulo isósceles, entonces:

$$m\angle ONB = 45$$

$$\rightarrow m\angle ONB = 26{,}5$$

Finalmente por ángulo inscrito:

$$x = 2(26{,}5)$$

$$\therefore x = 53$$

# PROBLEMAS

06. En un triángulo ABC, m∠B=120, de ortocentro L y circuncentro K y $\overline{LK} \cap \overline{BC} = \{S\}$. Calcular m∠KSC.

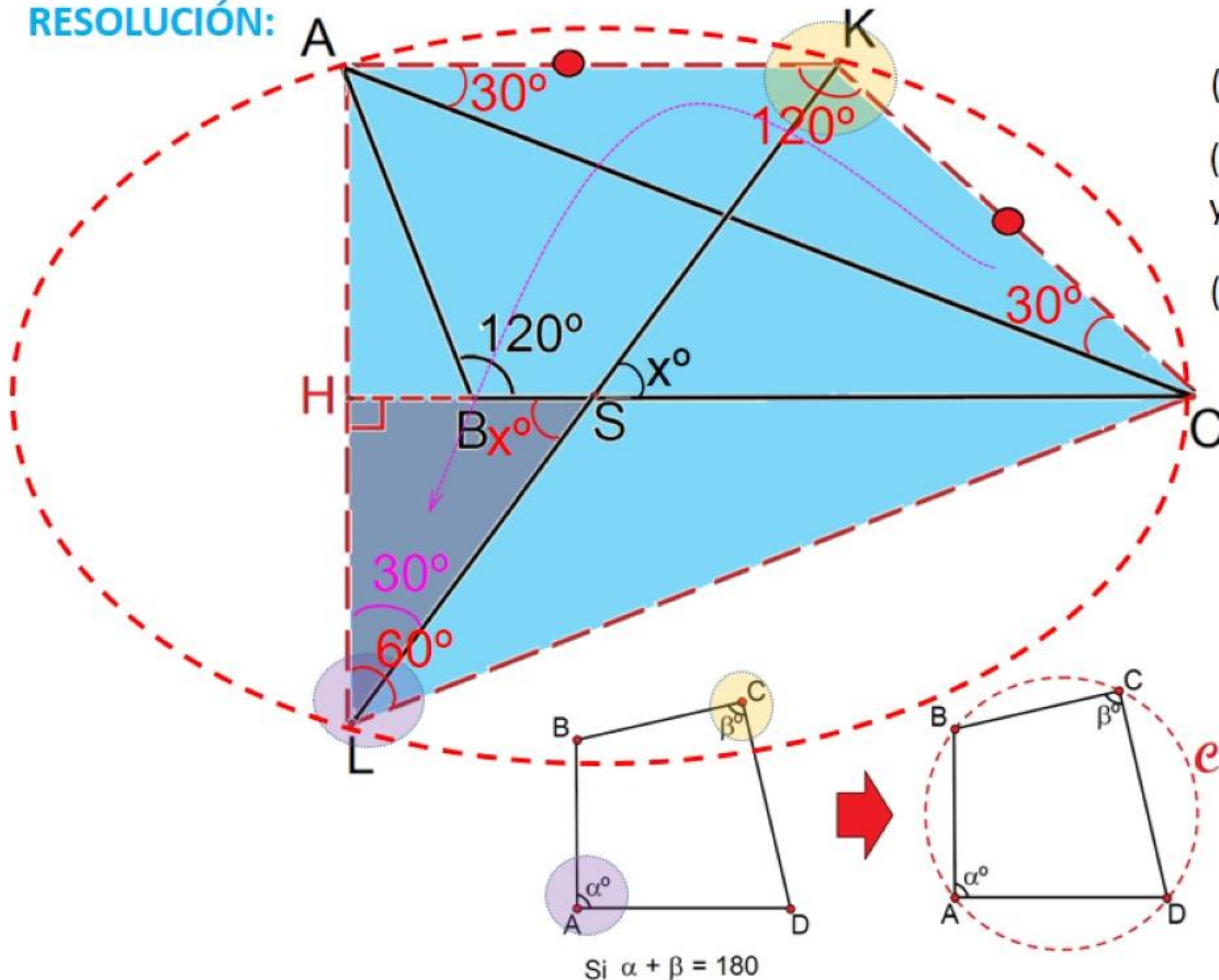
A) 53 B) 37 C) 45

D) 30 E) 60

**Resolución:**

# PROBLEMAS

**RESOLUCIÓN:**



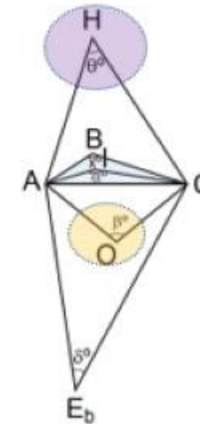

(1) Nos piden: m∠KSC=x

(2) Observamos que por ortocentro: m∠ALC=60 y por circuncentro: m∠AKC=120

(3)⏢ LAKC(Cuadrilátero Inscriptible):m∠ALK=30

(4) En el triángulo LHS:

$\therefore$ x = 60




Sea el ΔABC Obtusangulo, obtuso en B

Si:

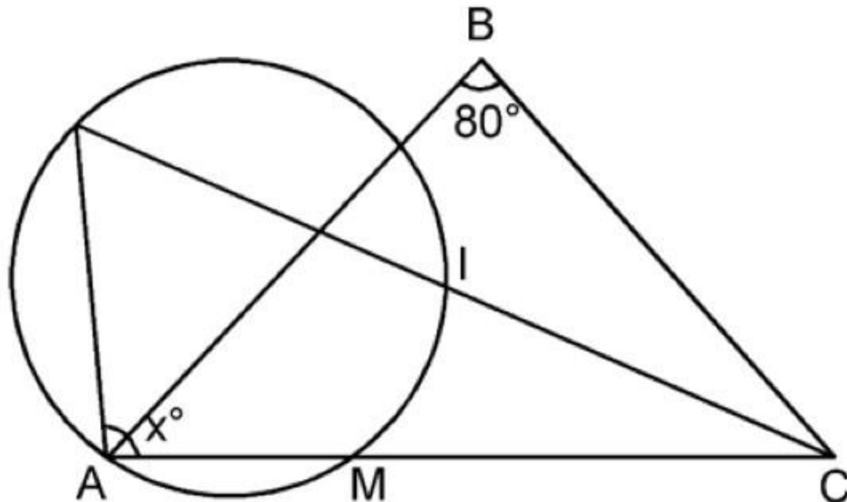
I es el incentro ΔABC → $\alpha=90+\frac{x}{2}$

H es el ortocentro ΔABC → $\theta=180-x$

O es el circuncentro ΔABC → $\beta=360-2x$

$E_b$ es el excentro ΔABC relativo a $\overline{AC}$ → $\delta=90-\frac{x}{2}$

07. Calcular el valor de x, si $m\widehat{AM} = 60$ e I es incentro del triángulo ABC.

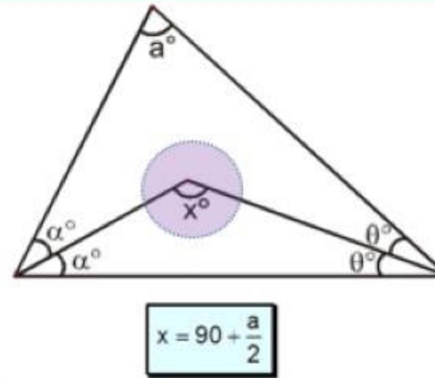



A) 140 B) 100 C) 120
D) 105 E) 130

**Resolución:**

**RESOLUCIÓN:**

B
80°
N
I
INCENTRO
ΔABC
30°
100°
x°
A
M
C
60°



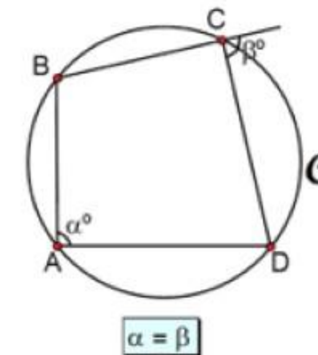

(1) Nos piden: x

(2) Por ángulo inscrito: m∠AIM=30

(3)ΔAB(I: Incentro): m∠AIC=130

(4) ⏢NAMI(Cuadrilátero Inscrito):

∴ x=100



# PROBLEMAS

08. En el triángulo acutángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, se sabe que BH=BO y $m\angle HBO=m\angle OBC=\alpha$. Calcular el valor de $\alpha$.

A) 10 B) 15 C) 20

D) 25 E) 30

**Resolución:**

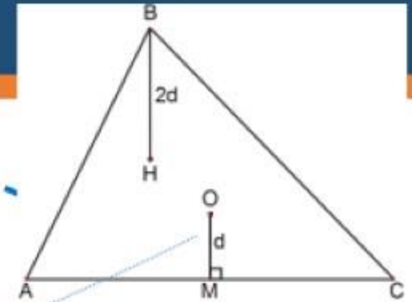
# PROBLEMAS

## RESOLUCIÓN:



Si H es el ortocentro y O es el circuncentro del ABC; se cumple

$\alpha=\beta$



En la figura:
Si H es ortocentro y O es circuncentro del $\triangle$ABC, entonces

BH=2(OM)

(1) Nos piden: $\alpha$

(2) Observamos que $m\angle ABH = m\angle OBC = \alpha$

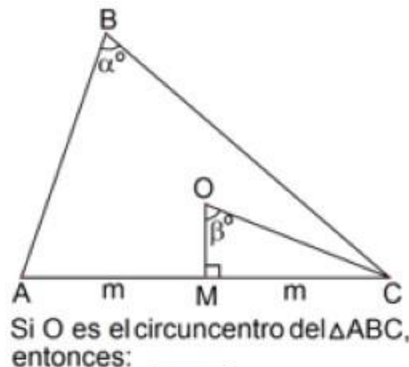
(3)Trazar $\overline{OM}\perp\overline{AC}$ tal que AM=MC=12 y por teorema: BH=2(OM)=2a

(4) ◺MOC(Triángulo rectángulo notable de 30 y 60):

$m\angle MOC=60$

(5) Observamos que: $3\alpha=60$

$\therefore \alpha=20$



Si O es el circuncentro del $\triangle$ABC, entonces:

$\alpha=\beta$

B
$\alpha°$ $\alpha°$ $\alpha°$
2a
2a
2a
O
H
a
60°
2a
A
M
C

# PROBLEMAS

09. Calcular el circunradio de un triángulo acutángulo ABC, si m∠B=37 y la distancia de B al ortocentro del triángulo es igual a 32 u.

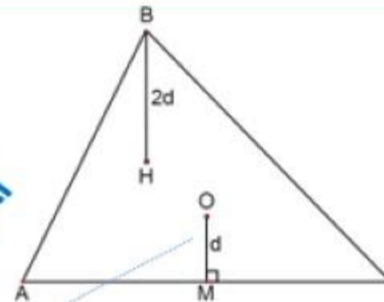
A) 28 B) 25 C) 15
D) 20 E) 240

**RESOLUCIÓN:**

# PROBLEMAS

**RESOLUCIÓN:**

B
37°
32
H
R
O
37°
16
R
A
M
C

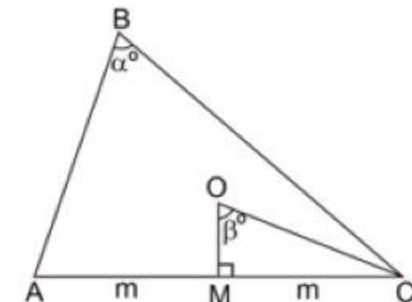



(1) Nos piden: R

(2)Trazar $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ tal que AM=MC y por el teorema: BH=2(OM)=32

(3) Observamos que m∠MOC=m∠ABC=37

(4) ◺OMC (Triángulo rectángulo notable aproximado de 37 y 53): R=20



10. Dado el triángulo ABC, H es ortocentro y M es el punto medio de $\overline{AC}$, el circunradio del triángulo ABC mide R. Encuentre la distancia de M al punto medio del segmento BH.

A) $\frac{5R}{6}$ B) $\frac{3R}{4}$ C) $\frac{3R}{2}$

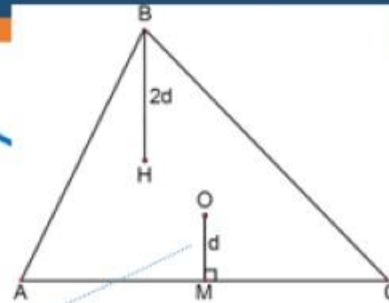
D) R E) $\frac{R}{2}$

**Resolución:**

# PROBLEMAS

**RESOLUCIÓN:**






(1) Nos piden: MN=x

(2)Trazar $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ tal que AM=MC y por teorema: BH=2(OM)=2a

(3) Observamos que $\overline{BN} // \overline{OM}$ y BN=OM, entonces BNMO es un paralelogramo.

$\therefore$ x = R

# PROBLEMAS RESUELTOS

## CLAVES DE LA TAREA

| PROBLEMA | RESPUESTA | PROBLEMA | RESPUESTA |
|---|---|---|---|
| 01 | C | 06 | B |
| 02 | E | 07 | C |
| 03 | D | 08 | A |
| 04 | A | 09 | B |
| 05 | A | 10 | B |

PITAGORAS ACADEMIA

# FIN

MUCHAS GRACIAS